Primer parcial MA2112. Tipo B

Enero-Marzo 2006.
Resolución realizada por: Osmar Betancourt
Carné: 16-10130. @BetancourtOsmar

Resolución

Pregunta 1. Sea f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad y \neq 0 \\ \\ 0 & si \quad y = 0 \end{cases}$$

$a.$) ¿Es continua en el punto $(0,0)$?

Calculamos el límite de la función, para ello nos aproximaremos al punto mediante la recta $y = mx$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y=mx)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{\sqrt{x^2(1+m^2)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{|x|\sqrt{1+m^2}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{xm}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xm}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \end{cases}$$

Tenemos un posible valor del límite, debemos de hallar un delta en función de epsilon a través de la definición formal del límite.

$$0 < ||(x,y) - (0,0)|| < \delta \Bigg/ \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$$

Procedamos a acotar y a utilizar propiedades de la desigualdad.

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |x| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta,\ \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |y| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

$$\Rightarrow \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \varepsilon$$

Basta tomar $\delta = \varepsilon$ para demostrar que el límite existe y vale 0

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \therefore f \text{ es continua en } 0.$$

$b.$) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?

Hallemos las derivadas parciales de f en $(0,0)$, para ello haremos uso de la derivada por definición.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(h+0)(0)}{\sqrt{h^2+0}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(0)(0+h)}{\sqrt{0+h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Veamos si f es diferenciable en $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{xy}{x^2+y^2}-0-\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-0\\y-0\end{pmatrix}\right\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\text{ Nos aproximamos con } y=mx$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y=mx)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

Ya que el límite depende de la trayectoría, podemos concluir que no existe y por ende f no es diferenciable en $(0,0)$

Pregunta 2. Sean $w=f(u)$ de clase C^2 y $g(x,y)=-3x^2+xy+2y^2+1$. Si $h(x,y)=f(g)$, cumple $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,1)=10$. Hallar $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(0,0)$

Apliquemos la regla de la cadena en la función compuesta para obtener la derivada parcial que solicitan hallar en el enunciado.

$$h=f(g)\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{df}{du}\frac{\partial g}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}=\frac{d^2 f}{d^2 u}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\frac{df}{du}$$

Calculemos las derivadas parciales que necesitamos para obtener lo que nos piden.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-6x+y\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=0\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}=x+4y\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=0,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1$$

Ahora debemos de hallar el valor de la derivada de f en el punto que necesitamos, evaluaremos $g(1,1)$ y obtendremos su derivada para luego aplicar la regla de la cadena y obtener el valor de la derivada de f en dicho punto

$$g(1,1)=1,\ \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)=5\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial y}(1,1)=\frac{df}{du}(1)\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)\Rightarrow 10=\frac{df}{du}(1)\,5\Rightarrow\frac{df}{du}(1)=2$$

Evaluamos $g(0,0)$ y luego sustituimos los valores en la expresión que habíamos desarrollado anteriormente con la regla de la cadena, sabiendo que $g(0,0)=1$. Podemos hacer uso de esto porque nos especificaron en el enunciado que f es de clase C^2 $\therefore \dfrac{d^2 f}{d^2 u}\exists$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{d^2 f}{d^2 u}(1)\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)\frac{df}{du}(1)$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{d^2 f}{d^2 u}(1)(0)(0)+(1)(2)\Rightarrow\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(0,0)=2$$

Pregunta 3. Halle el máximo y el mínimo de $f(x,y,z)=x+2y+3z$ sobre la curva intersección del cilindro $x^2+y^2=2$ con el plano $y+z=1$

Empleamos la función de Lagrange con las dos condiciones igualadas a 0. Definimos $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ y $h(x, y, z)$

$$F(x, y, z, \lambda, \beta) = x + 2y + 3z + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right) + \beta\left(y + z - 1\right)$$

Derivamos parcialmente la función y resolvemos el sistema de ecuaciones de sus derivadas parciales igualadas a 0

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = -3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2x} \\ 2 + 2y\lambda - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2x} \\ \lambda = \dfrac{1}{2y} \end{cases} \Rightarrow -y = x$$

Sustituimos esta condición dentro de las restricciones para obtener los posibles valores de x,y,z.

$(-y)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1$ debemos de sustituir ambos valores en las restricciones para determinar los otros valores

Si $y = 1 \Rightarrow x = -1$, $z = 0 \Rightarrow P1 = (-1, 1, 0)$. Si $y = -1 \Rightarrow x = 1$,$z = 2 \Rightarrow P2 = (1, -1, 2)$

Evaluamos f en $P1$ y en $P2$. De modo que $f(-1, 1, 0) = -1$ y $f(1, -1, 2) = 5$. Por lo cual podemos concluir que f alcanza un máximo en $(1, -1, 2)$ y f alcanza un mínimo en $(-1, 1, 0)$.

Pregunta 4. Cerca del punto $\left(1, 1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ la ecuación $xy + xz + yz + sin(xyz) + \pi = 0$ define una función $z = f(x, y)$. Hallar el plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0, z_0) si $x_0 = y_0 = 1$

Sabemos que $x_0 = y_0 = 1$, de modo que $f(1, 1) = -\dfrac{\pi}{2}$, derivemos implícitamente $F(x, y, z) \equiv xy + xz + yz + \sin(xyz) + \pi = 0$ para obtener ∇f y construir la ecuación del plano tangente a f en $\left(1, 1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{y + z + yz\cos(xyz)}{x + y + xy\cos(xyz)} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}(0)}{1 + 1 + (1)(0)} = \frac{\dfrac{\pi}{2} - 1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x + z + xz\cos(xyz)}{x + y + xy\cos(xyz)} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -\frac{1 - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}(0)}{1 + 1 + (1)(0)} = \frac{\dfrac{\pi}{2} - 1}{2}$$

La ecuación del plano tangente vendrá dada por:

$$z=-\frac{\pi}{2}+\left\langle\begin{pmatrix}\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\\ \\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}\right\rangle\Rightarrow z=-\frac{\pi}{2}+\frac{x\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}+\frac{y\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow z=\frac{x\pi}{4}-\frac{x}{2}+\frac{y\pi}{4}-\frac{y}{2}-\pi+1\Rightarrow 4z=x\left(\pi-2\right)+y\left(\pi-2\right)-4\pi+4$$

La cual es la ecuación a la gráfica de f en el punto $\left(1,1,-\frac{\pi}{2}\right)$

Notificar en caso encontrar algún error.
Osmar Betancourt
16-10130@usb.ve
Resolución revisada por el prof. Humberto Valera.